数独パズルの完全解法と計算機によらない問題作成法について

宗 田 光 一 *

2012 年 9 月 15 日

はじめに

コンピュータが「数独（すうどく）」を解いてゆく様を見ると、力づくで計算しているのが健気（けなげ）であり、人間にはできない仕事であると認識させられる。それと同時に、「人が扱うのにふさわしい解法が当然見つけられてしかるべきだろう」という感想をもつにいたる。

その数独の名で知られるパズルは、「９×９」の升目に１～９の数を縦横とリージョン（ボックス領域）に、いずれも共に重複することがないように挿入するものである。あらかじめ手がかりとしての数が組み込まれていて、パズルとしての難易度が決められていることが特徴である。ただしこの難易度は、計算機の処理に要する時間をもとに算出されたと考えられ、人が解答を求めるときに感じる「難易度」とは必ずしも一致していないことが多い。

この数独パズルにおいて、初めにどのような数が与えられていても「確実に解ける手順」というものはまだ今のところ示されていない。そこで本論文では、与えられたこの数独パズルを確実に解くための完全な手順を示す。さらには、計算機によらずに数独パズルそのものを簡単に制作する方法も導く。数独パズルの拡大および一般化として、「16 × 16」「n × n」の制作方法についても簡潔に示すものとする。

数独パズルの完全解法と
計算機によらない問題作成法について

§0　数独の定義と準備

升目の定義 0.1

次の図を数独の基本形とし、行と列の升目の位置を fig.1 の格子 (x,y) のように定める。さらに升目が 9 つ集まってできている fig.2 の R1 ～ R9 はリージョン（region ＝領域）と呼ぶ。(1,1)=5 と書いたとき、升目 (1,1) の中の数は「5」であることを表す。
（ただし、$1 \le x \le 9$,　$1 \le y \le 9$）

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	$(1,8)$	$(1,9)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$	$(2,7)$	$(2,8)$	$(2,9)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$	$(3,7)$	$(3,8)$	$(3,9)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$	$(4,7)$	$(4,8)$	$(4,9)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$	$(5,7)$	$(5,8)$	$(5,9)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$	$(6,7)$	$(6,8)$	$(6,9)$
$(7,1)$	$(7,2)$	$(7,3)$	$(7,4)$	$(7,5)$	$(7,6)$	$(7,7)$	$(7,8)$	$(7,9)$
$(8,1)$	$(8,2)$	$(8,3)$	$(8,4)$	$(8,5)$	$(8,6)$	$(8,7)$	$(8,8)$	$(8,9)$
$(9,1)$	$(9,2)$	$(9,3)$	$(9,4)$	$(9,5)$	$(9,6)$	$(9,7)$	$(9,8)$	$(9,9)$

< fig.1 >

$R1$	$R2$	$R3$
$R4$	$R5$	$R6$
$R7$	$R8$	$R9$

< fig.2 >

行の定義 0.2

「(1,1) 行」とは、(1,1) を先頭とする升目 9 つの横並び行のことを指す。

列の定義 0.3

「(1,1) 列」とは、(1,1) を先頭とする升目 9 つの縦並び列のことを指す。

リージョンの定義 0.4

「R1」とは、(1,1)(1,2)(1,3)・(2,1)(2,2)(2,3)・(3,1)(3,2)(3,3) の領域を指す。

「R2」とは、(1,4)(1,5)(1,6)・(2,4)(2,5)(2,6)・(3,4)(3,5)(3,6) の領域を指す。

「R3」とは、(1,7)(1,8)(1,9)・(2,7)(2,8)(2,9)・(3,7)(3,8)(3,9) の領域を指す。

「R4」とは、(4,1)(4,2)(4,3)・(5,1)(5,2)(5,3)・(6,1)(6,2)(6,3) の領域を指す。

「R5」とは、(4,4)(4,5)(4,6)・(5,4)(5,5)(5,6)・(6,4)(6,5)(6,6) の領域を指す。

「R6」とは、(4,7)(4,8)(4,9)・(5,7)(5,8)(6,6)・(6,7)(6,8)(6,9) の領域を指す。

「R7」とは、(7,1)(7,2)(7,3)・(8,1)(8,2)(8,3)・(9,1)(9,2)(9,3) の領域を指す。

「R8」とは、(7,4)(7,5)(7,6)・(8,4)(8,5)(8,6)・(9,4)(9,5)(9,6) の領域を指す。

「R9」とは、(7,7)(7,8)(7,9)・(8,7)(8,8)(8,9)・(9,7)(9,8)(9,9) の領域を指す。

当たりの定義 0.5

「当たり」とは、行・列・リージョンにおいて、重複する数のことを表す。

可能数の定義 0.6

「可能数」とは、行・列・リージョンにおいて、空白の升目に入る可能性のある数を表す。従って、「当たり」がある数は「可能数」にはならない。

ダブル数の定義 0.7

「ダブル数」とは、行・列・リージョンにおいて、２つの空白の升目に入る「可能数」の内、２数が共に同じ「可能数」である場合を表す。

トリプル数の定義 0.8

「トリプル数」とは、行・列・リージョンにおいて、３つの空白の升目に入る「可能数」の内、３数が共に同じ「可能数」である場合を表す。

唯一数の定義 0.9

「唯一数」とは、行・列・リージョンにおいて、行、列、リージョンの空白の升目に入る「可能数」の内、ある特定の一つの数しかあてはまらない数であることを表す。そのため、「唯一数」が求まると、その升目に入る数は確定することになる。

§1「９×９」数独の完全解法とその手順

計算機によらない数独の升目に入る数の求め方の手順を示す。

（1）行・列・リージョンに与えられている空白がより少ない升目に注目し、縦横とリージョンの「当たり」にならない数、つまり「可能数」を求めて、空白の升目の中にすべての「可能数」を小さく書きこむ。

（2）一つの行、もしくは列、またはリージョンを「可能数」で埋め尽くし、その「可能数」の並びを比較する。例えば、ある行の空白の升目が５つ

あり、その「可能数」がそれぞれ左から

「2・5」「3・8・9」「2・3・6・9」「5・6・9」「2・3・9」

であるとしたとき、その行の２つめの空白の升目にある「8」は、一並びの行の「可能数」の中でただ一つしかないことが分かり、それが「唯一数」であることが分かる。

（3）この場合、「唯一数」が「8」と確定することで、その空白の升目に書かれていた「3・8・9」を消し、一つだけ「8」と書き込む。これをくり返し、空白の升目を順に「可能数」で埋め尽くし、「唯一数」を求めていく。

（4）ダブル数、トリプル数はそれぞれの数がとりあえず確定したものと考え、仮の「唯一数」として扱う。その「ダブル数」「トリプル数」を除き、それ以外の「可能数」を比較することで、行、列、リージョンの「唯一数」を順に求めていく。

（5）与えられた数独は、パズル制作者によって始めからすべて唯一数で埋め尽くされているため、このように「可能数」から「唯一数」を割り出していく方法で、どのようなパターンでも一意的に空白の升目を埋めていくことができる。この手順を熟知すると、難易度に関係なく、誰でもわずか10分ほどの時間で完全な解答を得ることができる。

このような画一的な方法で、数独はどのようなパターンであっても、始めの手がかりとなる数が与えられているかぎり完全に解くことができる。「可能数」を求めるときに、多少の慎重さと気配りが必要であるものの、あせらずに楽しみながら「可能数」を整理し、その中から「唯一数」を見つけることは、小さな発見の喜びが伴う。そのため、集中力を養うという教育的な意味からも、小学生、中学生に親しんでもらいたい。今後も考えるための教材として、十分に活用できるものと思われる。

§2「９×９」数独の制作手順の考察

数独はその解法よりも、パズル問題の制作についての手順の方がより簡単

るが、実は一つのリージョンを確定すると、そこから「当たり」にならない埋め込みのパターンは計算機の助けを得なくても容易に示すことができる。さらには、いくつかの入れ替え手順にて、いくらでも望むだけの数独を制作することが可能である。こちらの方法を熟知すると、解法よりもさらに短時間の５分程度で、問題を作成することができる。その方法を述べる。

（１）Ｒ１に、任意の数「１～９」を割り当てる。

（２）Ｒ１の数を、行ごとに

A=(1,1)(1,2)(1,3),　B=(2,1)(2,2)(2,3),　C=(3,1)(3,2)(3,3)

の３つに分ける。

（３）Ｒ２の中に、Ｒ１と行が重なり「当たり」にならないように、たとえば B,A,C のように並べて挿入する。

（４）次に、Ｒ３の中に、Ｒ１とＲ２の行が重なり「当たり」にならないように、 C,B,A のように並べて挿入する。これでＲ１，Ｒ２，Ｒ３は共に「当たり」がない状態で数を埋め込むことができる。

（５）この状態のまま、Ｒ２とＲ３を入れ替えても良い。

（６）次に、Ｒ１の数を列ごとに

G=(1,1)(2,1)(3,1),　H=(1,2)(2,2)(3,2),　I=(1,3)(2,3)(3,3)

の３つに分ける。

（７）Ｒ４の中に、Ｒ１と列が重なり「当たり」にならないように、たとえば H,I,G のように並べて挿入する。

（８）次にＲ７の中に、Ｒ１，Ｒ２と列が重なり「当たり」にならないように、 I,G,H のように並べて挿入する。

（９）この状態のまま、Ｒ４とＲ７を入れ替えても良い。

（10）さらに、Ｒ１と同様にＲ２の数を列ごとに

G’=(1,4)(2,4)(3,4),　H’=(1,5)(2,5)(3,5),　I’=(1,6)(2,6)(3,6)

の３つに分ける。

（11）Ｒ５の中に、Ｒ２と列が重なり「当たり」にならないように、たとえば H',I',G' のように並べて挿入する。

（12）次に、Ｒ８の中に、Ｒ２と列が重なり「当たり」にならないように、I',G',H' のように並べて挿入する。

（13）この状態のまま、Ｒ５とＲ８を入れ替えても良い。

（14）さらに、Ｒ１，Ｒ２と同様にＲ３の数を列ごとに

G"＝(1,7)(2,7)(3,7),　H"＝(1,8)(2,8)(3,8),　I"＝(1,9)(2,9)(3,9)

の３つに分ける。

（15）Ｒ６の中に、Ｒ３と列が重なり「当たり」にならないように、たとえば H",I",G" のように並べて挿入する。

（16）Ｒ９の中に、Ｒ３と列が重なり「当たり」にならないように、I",G",H" のように並べて挿入する。

（17）この状態のまま、Ｒ６とＲ９を入れ替えても良い。

この手順によって、いずれの行、列、リージョンにも「当たり」が無い形となり、数独問題の一つのパターンが完了する。その後に、Ｒ１内にある特定の列の２つの数を入れ替えるとき、Ｒ２とＲ３の列で同じ組み合わせの数を入れ替えると、「当たり」が無い形を再度作成することができる。つまり３か所で２数を入れ替える。同様に、どの列でも２数の入れ替えが可能であり、さらにどの行においても同様に３か所で２数を入れ替えを行えばよいことになる。

この操作は、問題制作の段階で同じパターンが現れることになるため、できるだけ自然のバラツキに見せるための工夫として必要になる。これを「シャッフル」と呼ぶことにする。

問題制作のスタート段階において、Ｒ１の９つの数を入れ替えるだけで、その組み合わせは「９！＝３６２８８０通り」であるため、それがさらに９パターンあることになり、加えてＲ２～Ｒ９の組み換えがそれぞれ「１６通り」さらに２数の組み合わせによる入れ替え「シャッフル」が相当数可能で

合わせが得られることになる。

この方法によると簡単に、計算機を使うことなく手作りで「当たり」の無い数独問題を作成することができる。

§3「16 × 16」及び「n × n」の拡大数独の制作について

新しく「9 × 9」の発展形として、「16 × 16」及び「n × n」という拡大数独の制作方法についても考えてみることにしよう。

11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
21	22	23	24	25	26	27	28	29	2A	2B	2C	2D	2E	2F
31	32	33	34	35	36	37	38	39	3A	3B	3C	3D	3E	3F
41	42	43	44	45	46	47	48	49	4A	4B	4C	4D	4E	4F
51	52	53	54	55	56	57	58	59	5A	5B	5C	5D	5E	5F
61	62	63	64	65	66	67	68	69	6A	6B	6C	6D	6E	6F
71	72	73	74	75	76	77	78	79	7A	7B	7C	7D	7E	7F
81	82	83	84	85	86	87	88	89	8A	8B	8C	8D	8E	8F
91	92	93	94	95	96	97	98	99	9A	9B	9C	9D	9E	9F
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	AA	AB	AC	AD	AE	AF
B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	BA	BB	BC	BD	BE	BF
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	CA	CB	CC	CD	CE	CF
D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	DA	DB	DC	DD	DE	DF
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	EA	EB	EC	ED	EE	EF
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	FA	FB	FC	FD	FE	FF
G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	GA	GB	GC	GD	GE	GF

< fig.3 >

R1	R2	R3	R4
R5	R6	R7	R8
R9	RA	RB	RC
RD	RE	RF	RG

< fig.4 >

拡大数独の「16×16」についても、「９×９」の場合と同じようにＲ１に割り当てた数「１～Ｇ」を任意に入れることから始まり、行のリージョン、列のリージョンごとに「当たり」が起こらないように入れ替えを行い、埋め込むことが可能である。

各リージョンは共に升目を増やし「４×４」として構成することで、従来の「９×９」数独と同様の問題を制作することができる。使用する数も「16×16」にする場合は、１～９までは通常数を使い、その先はＡ～Ｇを使うことで、見やすいものにすることができる。実際に制作する方法についてその概略を述べる。

（１）fig.4 のＲ１に、任意の 16 の数と記号「１～９、Ａ～Ｇ」を割りふる。

（２）Ｒ１の数を、行ごとに

A=(1,1)(1,2)(1,3)(1,4),　B=(2,1)(2,2)(2,3)(2,4),
C=(3,1)(3,2)(3,3)(3,4),),　D=(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)

の４つに分ける。

（３）Ｒ２、Ｒ３、Ｒ４の中に、行が重なり「当たり」にならないように、

B,A,D,C　B,C,D,A　B,D,A,C
C,A,D,B　C,D,A,B　C,D,B,A
D,A,B,C　D,C,A,B　D,C,B,A

の９通りの中から選んで並べ替えて挿入する。

（４）この後に、Ｒ２、Ｒ３、Ｒ４を入れ替えても良い。

（５）次に、Ｒ１の数を列ごとに、

G=(1,1)(2,1)(3,1)(4,1),　H=(1,2)(2,2)(3,2)(4,2),
I=(1,3)(2,3)(3,3)(4,3),　J=(1,4)(2,4)(3,4)(4,4)

の４つに分ける。

H,G,J,I　H,I,J,G　H,J,G,I
I,G,J,H　I,J,G,H　I,J,H,G
J,G,H,I　J,I,G,H　J,I,H,G

の９通りの中から選んで並べる。

（７）この後に、Ｒ５、Ｒ９、ＲＤを入れ替えても良い。

（８）さらに、Ｒ２についても上記の（５）と同様に列ごとに４つに分け、それを（６）のようにＲ７、ＲＡ、ＲＥについても９通りの中から選んで並べる。

（９）同様の方法で、Ｒ３、Ｒ４も列ごとに組み合わせを選び並べ替えて挿入する。

こうした手順によって、「９×９」の場合と同じように、いずれの行、列、リージョンにも当たりが無い形とすることができるので、「16 × 16」数独の一つのパターンができあがる。

この時点で、そのままでも「16 × 16」数独問題は埋め込まれできあがるが、くり返しのパターンが目につくために、自然のバラツキに見せるために、列とリージョンの内での数の入れ替え「シャッフル」を行う。

「シャッフル」によって特定の列の２つの数を入れ替えるとき、それに対応して特定の列で同じ組み合わせの数４組を入れ替えることが必要であり、それによって「当たり」が無い形を再度作成することができる。

このとき「９×９」の場合と違い、リージョンの並びが４組あるので、いずれの場合も２数の４組を同時に入れ替えることで「当たり」が解消できる。

「16 × 16」の場合は、Ｒ１の 16 個の数と記号を入れ替えるだけで、その組み合わせは「16！＝ 20,922,789,888,000 通り」であるため、そのリージョンが 16 個あることになり、個々のリージョン自身の組み換えや、個別の２数の入れ替え「シャッフル」も相当数が可能であることから、「16 × 16」の数独パターンは、重複を認めた場合には天文学的な膨大な数の組み合わせが得られることになる。

そのこともあり、コンピュータに計算させるとたいへんな時間がかかるものと予想されるが、このような入れ替え法によると、いとも簡単に、しかも

できる。

「ｎ×ｎ」の場合は、各リージョンの中の升目の数と全体の枠中のリージョンの数比が等しくなる（正方行列の形になるとき）に限り、「16 × 16」と同様の手法をそのまま拡大することができ、「ｎ×ｎ」数独問題を作成することが可能となる。

§4 「16 × 16」拡大数独の実例

「16 × 16」の問題サンプルと、その解答を並べてみる。「９×９」が容易に解けるようになった「数独ヘビーユーザー」のためのパズルとして、今後広く提供することも可能と考えられる。

実例サンプルとして、以下２例を示す。「難易度」は空白数をそのまま記すことで表現する場合、一問目は「１５３」。二問目は「１７５」という表示もできる。

「16 × 16」数独問題例 1　　　　「難易度１５３」

	F		2		1		4			D		7			
3		D				6			5		9	E		A	
	1				5		9	B	F				8		C
7			9		8			E	1	A		B			2
	2		6	A		4				8	7		C	3	
		7				2			G		3		4		1
1		E	A				5		6			D			8
			G			9	8	4					2		
	B			4				A				5		C	
A		9			6		B				5			4	
D				C			7				F		A		3
		C	5		A			D		4			6		
2				5		E		8	9			C		1	
9	D				2	B				7	G				A
		5	E		C			F	2	B				8	

「16 × 16」数独解答 1

B	F	6	2	E	1	A	4	3	8	D	C	7	5	G	9
3	8	D	C	B	F	6	2	7	5	G	9	E	1	A	4
E	1	A	4	7	5	G	9	B	F	6	2	3	8	D	C
7	5	G	9	3	8	D	C	E	1	A	4	B	F	6	2
F	2	B	6	A	E	4	1	9	D	8	7	G	C	3	5
8	9	7	D	6	B	2	F	C	G	5	3	A	4	E	1
1	4	E	A	G	3	C	5	2	6	F	B	D	9	7	8
5	C	3	G	D	7	9	8	4	A	1	E	6	2	B	F
6	B	2	F	4	D	1	E	A	3	9	8	5	G	C	7
A	3	9	8	2	6	F	B	G	7	C	5	1	D	4	E
D	E	4	1	C	G	5	7	6	B	2	F	8	A	9	3
G	7	C	5	9	A	8	3	D	E	4	1	F	6	2	B
2	6	F	B	5	4	E	A	8	9	3	D	C	7	1	G
9	D	8	3	F	2	B	6	1	C	7	G	4	E	5	A
4	A	5	E	1	C	7	G	F	2	B	6	9	3	8	D
C	G	1	7	8	9	3	D	5	4	E	A	2	B	F	6

「16 × 16」数独問題例 2　　「難易度１７５」

		1		2				F			9	C			
F			9				3					7		1	
	5			7		1				B		F			9
		B					9		A				5		G
A					F				1					6	
	9		1				B			D		E			C
		F			C					6				5	
	3				2			4				8		D	
4			7				2				8		C		
9			F			6			2				7		E
		D			4			6		G				9	
			C			5					E			3	
E				G	1						5		B		
		4				C		1		F				7	
1			D		E				3			4			5

「16 × 16」数独解答２

7	*A*	1	4	2	5	8	*G*	*F*	*D*	*E*	9	*C*	6	*B*	3
F	*D*	*E*	9	*C*	6	*B*	3	2	5	8	*G*	7	*A*	1	4
2	5	8	*G*	7	*A*	1	4	*C*	6	*B*	3	*F*	*D*	*E*	9
C	6	*B*	3	*F*	*D*	*E*	9	7	*A*	1	4	2	5	8	*G*
A	4	*C*	*E*	*D*	*F*	*G*	8	9	1	5	2	*B*	3	6	7
5	9	2	1	6	7	3	*B*	*G*	8	*D*	*F*	*E*	4	*A*	*C*
D	*G*	*F*	8	*A*	*C*	4	*E*	3	*B*	6	7	1	9	5	2
6	3	7	*B*	5	2	9	1	4	*E*	*A*	*C*	8	*G*	*D*	*F*
4	*E*	*A*	7	1	3	*D*	2	5	*F*	9	8	6	*C*	*G*	*B*
9	8	5	*F*	*B*	*G*	6	*C*	*D*	2	3	1	*A*	7	4	*E*
3	1	*D*	2	*E*	4	*A*	7	6	*C*	*G*	*B*	5	*F*	9	8
G	*B*	6	*C*	8	9	5	*F*	*A*	7	4	*E*	*D*	2	3	1
E	7	9	*A*	*G*	1	*F*	*D*	8	4	2	5	3	*B*	*C*	6
8	2	4	5	3	*B*	*C*	6	1	*G*	*F*	*D*	9	*E*	7	*A*
1	*F*	*G*	*D*	9	*E*	7	*A*	*B*	3	*C*	6	4	8	2	5
B	*C*	3	6	4	8	2	5	*E*	9	7	*A*	*G*	1	*F*	*D*

*R*1	*R*2	*R*3	*R*4
*R*5	*R*6	*R*7	*R*8
*R*9	*RA*	*RB*	*RC*
RD	*RE*	*RF*	*RG*

*386-0601 長野県小県郡長和町大門 3518-2520
koichi@muneta.info　(0268-60-0118)